Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Sarah Hess
Moritz Schick
Wintersemester 2023/24

Übungen zur Vorlesung *Lineare Algebra I*

Blatt 12

Abgabe: Freitag, den 02. Februar 2024, um 10:00 Uhr in dem Briefkasten Ihres Tutors oder Ihrer Tutorin auf F4. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und dem Namen Ihres Tutors / Ihrer Tutorin.

Beweismechanikaufgabe *(4 Punkte)*

(a) Geben Sie eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ an, deren Bild durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird.

(b) Geben Sie eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ an, deren Kern durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird.

Hinweis: Die Beweismechanik-Abgabe muss als Zweier-Team abgegeben werden. Speichern Sie Ihre gemeinsame Beweismechanik-Abgabe in einer PDF-Datei unter einem Namen der Form b1blattx-bma-ihrnachname-nachnameihrespartners.pdf *ab, wobei Sie x durch die Nummer des Übungsblattes, ihrnachname durch Ihren Nachnamen ersetzen usw. Laden Sie die Beweismechanik-Abgabe dann getrennt von den anderen Aufgaben auf der ILIAS-Seite der Vorlesung „Einführung in das mathematische Arbeiten I" online unter „Abgabe Beweismechanik-Aufgabe – Vorlesung Lineare Algebra I" hoch. Die Abgabe im Zweier-Team ist verpflichtend. Pro Zweier-Team bitte nur eine Abgabe!*

Aufgabe 12.1 *(1+2+2 Punkte)*

Sei K ein Körper, $A = (A_1 \mid \cdots \mid A_n) \in K^{m\times n}$ eine Matrix mit Spalten $A_1, \ldots, A_n \in K^{m\times 1}$. Wir betrachten die lineare Abbildung $T_A : K^{n\times 1} \to K^{m\times 1}$ mit $T_A(X) := AX$. Der *Spaltenraum* von A ist $\operatorname{span}\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq K^{m\times 1}$. Der *Spaltenrang* von A ist die Dimension des Spaltenraums.

(a) Zeigen Sie, dass $\ker T_A$ mit dem Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $AX = 0$ übereinstimmt.
(b) Zeigen Sie, dass R_{T_A} mit dem Spaltenraum von A übereinstimmt.
(c) Zeigen Sie, dass der Rang von T_A gleich dem Spaltenrang von A ist.

Aufgabe 12.2 *(2 Punkte)*

Sei K ein Körper, $A \in K^{m\times n}$. Sei T_A definiert wir in Aufgabe 12.1. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von T_A bezüglich der Standardbasen von $K^{n\times 1}$ und $K^{m\times 1}$.

Aufgabe 12.3 *(2+3 Punkte)*

Sei K ein Körper.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\sigma\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ eine bijektive Abbildung. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der Abbildung

$$\begin{array}{cccc} f_\sigma\colon & K^{n\times 1} & \to & K^{n\times 1} \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma(n)} \end{pmatrix} \end{array}$$

bezüglich der Standardbasis von $K^{n\times 1}$.

(b) Sei $\mathcal{B} := (v_1, v_2, v_3, v_4)$ gegeben durch

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und $\mathcal{B}'$ die Standardbasis von $K^{4\times 1}$. Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $P \in M_{4\times 4}(K)$ sodass $P[\alpha]_{\mathcal{B}'} = [\alpha]_{\mathcal{B}}$ für alle $\alpha \in K^{4\times 1}$ gilt.

Zusatzaufgabe für Interessierte. *(2+2 Bonuspunkte)*

Sei K ein Körper und betrachten Sie die Verknüpfung

$$\begin{array}{cccc} \cdot \ : & K[x] \times K[x] & \to & K[x] \\ & \left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i, \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \right) & \mapsto & \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=k} (a_i b_j) \right) x^k, \end{array}$$

wobei $\sum_{i+j=k}$ die Summe über alle Tupel $(i,j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ mit $i + j = k$ bezeichnet.

Sie dürfen ohne Beweis annehmen, dass $K[x]$ ein K-Vektorraum ist (vgl. Aufgabe 7.1) und die Verknüpfung $\cdot$ assoziativ ist.

(a) Zeigen Sie, dass $(K[x], +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins ist.

(b) Zeigen Sie, dass $K[x]$ versehen mit der Skalarmultiplikation $\cdot$ als Vektorenmultiplikation eine lineare Algebra über K ist.